I- Rappel :

⟶ une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I , s'il existe un réel, noté f ' (a). tel que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x) - f(a)}{x - a}$ = f '(a).

⟶ f est dérivable en a de I. Si et seulement si

- f est dérivable à droite en a
- f est dérivable à gauche en a
- $f_g'(a) = f_d'(a)$

⟶ Si f est dérivable en a alors : f (a) + f' (a) . h est une approximation affine de f (a + h)

⟶ Toute fonction polynôme est dérivable en tout réel.

⟶ f est dérivable sur un intervalle ouvert si elle est dérivable en tout réel de cet intervalle.

⟶ Une fonction est dérivable sur un intervalle $[a,b]$ (a < b)

Si elle est : * Dérivable sur $]a, b[$

* Dérivable à gauche en a
* Dérivable à droite en b.

⟶ Une fonction est dérivable sur un intervalle $[a,b[$ (a < b)

Si elle est :

- Dérivable sur $]a, b[$
- Dérivable à gauche en a

1- <u>Dérivées de fonctions usuelles :</u>

f	L'ensemble de dérivabilité	f'
$x \longmapsto x^n$, n $^*\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto n \cdot x^{n-1}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto -n\, x^{-n-1}$
$x \longmapsto \sin(ax+b)$; $a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto a\cos(ax+b)$
$x \longmapsto \cos(ax+b)$; $a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -a\sin(ax+b)$
$x \longmapsto \mathrm{tg}(ax+b)$; $a \neq 0$	Tout intervalle inclus dans Df	$x \longmapsto a\left[1+\mathrm{tg}^2(ax+b)\right]$

2- <u>Opérations sur les fonctions dérivables :</u>

Soit f et g deux fonctions dérivables sur intervalle I.

Fonction	Intervalle de dérivabilité	Fonction dérivée
f + g	I	f ' + g '
a . f ($a \in \mathbb{R}$)	I	a . f '
$f \times g$	I	f ' . g + g ' .f
$\dfrac{1}{f}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I, f(x) \neq 0\}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I, f(x) \neq 0\}$	$\dfrac{f'.g - g'f}{g^2}$
f^n : $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	I	$n f' f^{n-1}$
$\dfrac{1}{f^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I, f(x) \neq 0\}$	$-n f' f^{-n-1}$

http://selmisse.e-monsite.com

 Tous droits réservés selmi.ali 2008

Devoir.tn Toutes les matières, tous les niveaux...

II- Dérivées successives :

$\longrightarrow$ Soit f une fonction dérivable sur intervalle I . La fonction f ‘ est la dérivée première de f.

$\longrightarrow$ Si f ‘ est dérivable sur I, sa fonction dérivée notée f ‘’ ou $f^{(2)}$ est la dérivée seconde de f.

$\longrightarrow$Si $f^{(n-1)}$ $(n \geqslant 2)$ est dérivable sur I, sa fonction dérivée est la fonction dérivée $n^{ième}$ de f, ou dérivée d’ordre n de f on la note $f^{(n)}$

III- Dérivée de la fonction composée :

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et g une fonction définie sur un intervalle J ∍f (a).
Si f est dérivable en a et g est dérivable en f (a) alors g o f est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.
Donc si f est dérivable sur un intervalle I et g dérivable sur un intervalle J contenant f (I) alors g o f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$. $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

IV- Théorème des accroissements finis

<u>Théorème de Rolle</u> :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ (a<b) et dérivable sur $]a,b[$ tel que f (a) = f (b)
Alors il existe un réel c de $]a,b[$ tel que f’ (C) = 0

<u>Graphiquement :</u>

Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite des abscisses

<u>Théorème des accroissements finis</u>

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe un réel c de $]a,b[$
Tel que : f (b)- f (a) = f ’ (c) (b – a)

<u>Théorème des intégralités des accroissements finis :</u>

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$,et s’il existe deux réels m et M tel que pour tout x de $]a,b[$
$m \leqslant f'(x) \leqslant M$ alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$

<u>Conséquence :</u>

Si f est dérivable sur un intervalle I et s’il existe un réel M > 0 tel que pour tout x de I $|f'(x)| \leqslant M$ alors pour tous réels a et b de I on a : $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$

V- Extrema :

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I :

$\longrightarrow$ On dit que f admet un maximum local en a. S’il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que : pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(a)$.

$\longrightarrow$ On dit que f admet un minimum local en a. S’il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que : pour $x \in J$, $f(x) \geqslant f(a)$.

$\longrightarrow$ On dit que f admet un extremum local en a. Si f admet un maximum ou un minimum local en a.

2) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant a

$\longrightarrow$ Si f admet un extremum local en a alors f ‘ (a) = 0

$\longrightarrow$ Si f ‘ (x) s’annule et change de signe en a alors f admet un extremum local en a.

VI- Point d’inflexion :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en a de I. C f la courbe de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$,on dit que A(a, f (a)) est un point d’inflexion de C f si Cf traverse sa tangente en ce point.

<u>Théorème</u>

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant a. Cf la courbe de f dans un repère orthonormé.
Si f ’’ s’annule et change de signe en a alors A (a, f (a)) est un point d’inflexion de Cf.

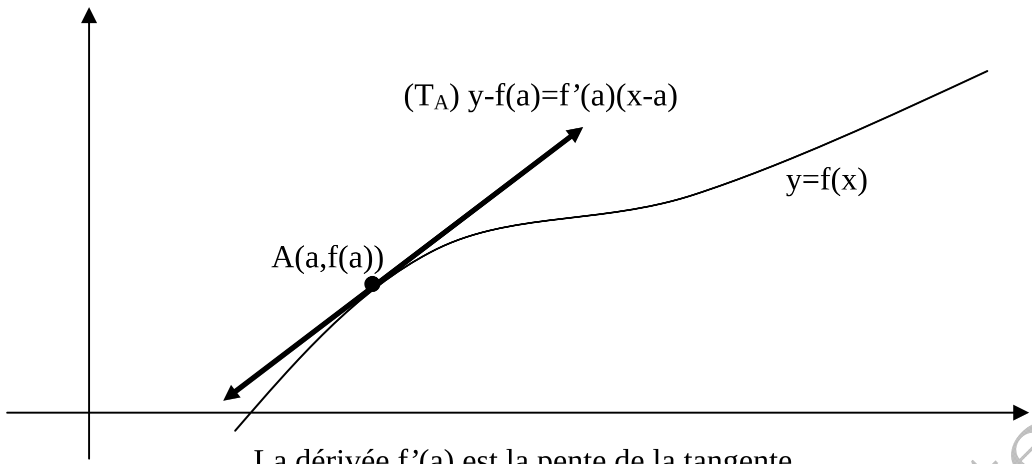
http://selmisse.e-monsite.com

 Tous droits réservés selmi.ali 2008

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

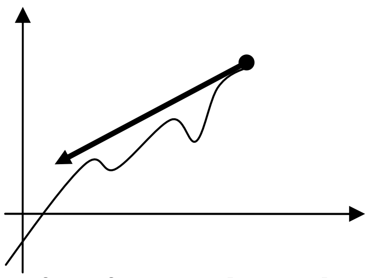
Illustrations : dérivées et tangentes, théorème de Rolle, accroissements finis.

Tangente et dérivée

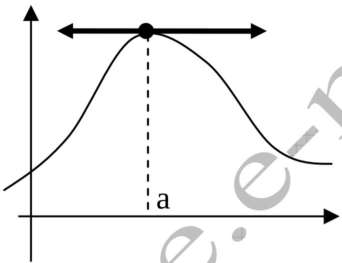


La dérivée f'(a) est la pente de la tangente

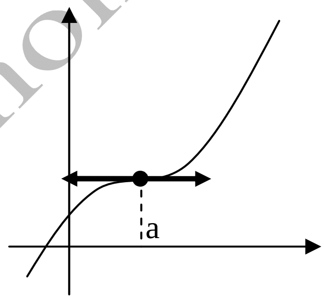
Signe de la dérivée d'une fonction monotone, extremum, dérivée nulle



Si f(x)≤f(a) quand x<a, alors la dérivée f'(a) est positive : la tangente « monte ».

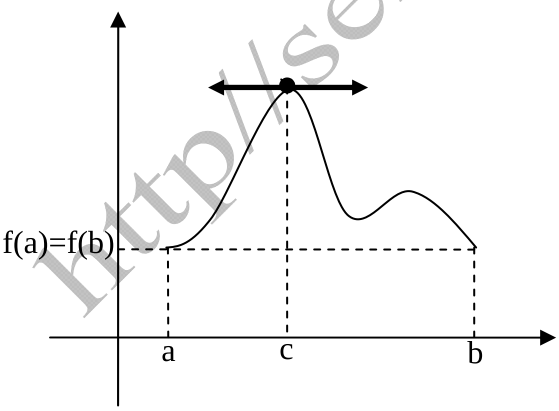


Si f présente un extremum en a, on a f'(a)=0 : la tangente est « horizontale »

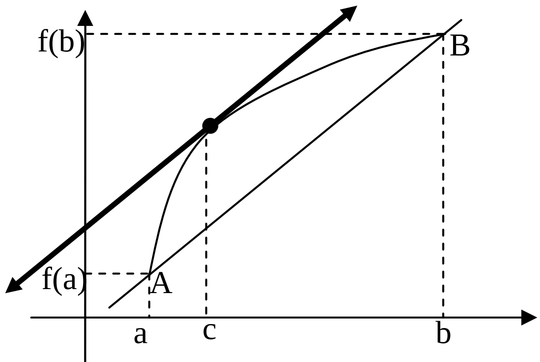


On peut avoir f'(a)=0 sans avoir d'extremum

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis



Théorème de Rolle :
si f(a)=f(b), il y a c tel que a<c<b et f'(c)=0.



Théorème des accroissements finis :
Il y a un $c \in]a,b[$ tel que la tangente en c soit parallèle à (AB), c'est-à-dire

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

http://selmisse.e-monsite.com

 Tous droits réservés selmi.ali 2008

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...